Doc. dr Slobodan Lakić,
Ekonomski fakultet u Brčkom

KONVERGENCIJA JEDNOG ITERATIVNOG POSTUPKA

Rezime

U radu se ispituje konvergencija jednog iterativnog postupka za rješavanje sistema linearnih jednačina. Pokazano je da ovaj metod u nekim slučajevima može dati bolje rezultate u smislu brže konvergencije od nekih već dobro poznatih postojećih metoda.

CONVERGENCE OF AN ITERATIVE PROCEDURE

Abstract

The paper examines oonvergence of an iterative procedure for solving the system of linear equations. It has been demonstrated that this method may achieve in some cases better results concerning faster convergence than some other well-known methods.

UVOD

U ovom dijelu rada dajemo neke oznake i definicije koje ćemo koristiti u daljem radu.
$R^{n,n}$ – skup realnih kvadratnih matrica reda n.
$K^{n,n}$ – skup kompleksnih kvadratnih matrica reda n.

$$P_i(A) = \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{n} \lfloor a_{ij} \rfloor, A \in K^{n,n}.$$

$M(A) = (C_{ij)} \in R^{n,n}, C_{ii} = |a_{ij}|, i = 1, 2, \dots, n, c_{ij} - |a_{ij}|, i, j = 1, 2, \dots, n, j \neq i$,
gdje je $A = (a_{ij}) \in K^{n,n}$

Matrica $A \in R^{n,n}$ je M-matrica ako i samo ako njena inverzna matrica ima nenegativne elemente i ako važi
$a_{ii} > 0$, i - I, 2, ..., n, $a_{ij} \leq 0$, i, j = 1, 2, ... , n, $i \neq j$.
Matrica $A \in K^{n,n}$ je H-matrica ako i samo ako je M(A) M-matrica.
R^n – skup n-dimenzionih realnih brojeva (vektora).

KONVERGENCIJA

Posmatramo sistem linearnih jednačina

$$Ax = b$$

gdje je $A \in R^{n,n}$ regularaa matrica i $b \in R^n$.

Ovaj sistem može se iterativno rješavati sljedećim postupkom

(1) $x^0 \in R^n$, $x^{k+1} = (I - M^{-1} A)\, x^k + M^{-1} b$,

gdje je k = 0, *l, 2, ...* , M tridijagonalna matrica, I jedinična matrica.

Sada ćemo dati jedan kriterijum konvergencije postupka (1) za jednu klasu matrica.

Teorema: Neka je $A = (a_{ij}) \in R^{n,n}$ («y) *e* H-matrica, $M = (m_{ij}) \in R^{n,n}$ regularaa tridijagonalna matrica i važi

$\frac{m_{ii}}{a_{ii}} \geq \frac{m_{ij}}{a_{ij}}, \frac{m_{ii}}{a_{ii}} + \frac{m_{ij}}{a_{ij}} \geq 1$, za $a_{ij} \neq 0$, i , j = 1, 2, … , n, $i \neq j$.

Pri čemu je $m_{ij} = 0$ za one indekse i, j za koje je $a_{ij} = 0$.

Tada za svaki početni vektor $x^0 \in R^n$ postupak (1) konvergira.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno tvrđenje teoreme da postoji karakteristična vrijednost z matrice

$B = I - M^{-1} A$ postupka (1) za koju važi $|z_i| \geq 1$.

Neka je $S_i = \{j \in \{l, 2, ... , \} \backslash \{i\} , a_{ij} \neq 0\}$, i = 1, 2, ... , n.

Prethodno ćemo dokazati sljedeće nejednakosti

$\left|(1-z)\frac{m_{ij}}{a} - 1\right| \geq \left|(1-z)\frac{m_{ij}}{a} - 1\right|$, i = 1, ... , n, $j \in S_i$

Neka je $z = re^{it}$, $t \in R$, $r \geq 1$, $\frac{m_{ii}}{a_{ii}} = a, \frac{m_{ij}}{a_{ij}} = b.$

Tada je prethodna nejednakost ekvivalentna sa sljedećom

$a^2 - b^2 + r^2 (a^2 - b^2) - 2r(r^2 (a^2 - b^2) \cos t - 2 (a - b) - 2r (b - a) \cos t \geq 0$, tj.

$(a^2 - b^2) (1 + r^2) - 2r (a^2 - b^2 + b - a) \cos t - 2 (a - b) \geq 0$

pošto je $a^2 - b^2 + b - a \geq$ tada je

$(a^2 - b^2) (1 + r^2) - 2r \ (a^2 - b^2 + b - a) \cos t - 2 (a - b) \geq$
$(a^2 - b^2) (1 + r^2) - 2r (a - b)(a + b - 1) - 2(a - b) =$
$(a - b) ((a + b) (r - l)^2 + 2(r - 1)) \geq 0.$

Posljednja nejdnakost je tačna jer je

$a \geq b$, $a + b > 0$, $r \geq 1$.

Pošto je A H-matrica to postoji regularna dijagonalna matrica $W = \text{diag}(w_1, \dots, w_n)$ tako da je matrica AW strogo dijagonalno dominantna. Za matricu

$C = (c_{jj})$, $C = (1 - z) M - A$ važi

$$
\begin{aligned}
|c_{ii} w_i| > \frac{|c_{ii}|}{|a_{ii}|} \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq 1}}^{n} |a_{ij}\, w_j| \\
&= \sum_{j \in S_i} \left| (1 - z) \frac{m_{ii}}{a_{ii}} - 1 \right| |a_{ij}\, w_j| \\
&\geq \sum_{j \in S_i} \left| (1 - z) \frac{m_{ij}}{a} - 1 \right| |a_{ij}\, w_j| = \\
= \sum_{j \in S_i} |c_{ij}\, w_j|, i = 1, 2, \dots, n.
\end{aligned}
$$

Ako postoje $j_{1, \dots,} j_k \notin S_i$ tada je
$a_{i\,j1} = 0, \dots, a_{i\,jk} = 0$, pa je $c_{i\,jk} = 0, \dots, c_{i\,jk} = 0$.

Sada je

$$P_i(CW)\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i,j,\dots,j_k}}\left|c_{ii}\,w_j\right| < \left|c_{ij}\,w_j\right|, i = 1, 2, \dots, n.$$

Već smo dokazali da je

$$P_i(CW)\sum_{j\in S_i}\left|c_{ij}\,w_j\right| < |c_{ii}\,w_i|, i = 1, 2, \dots, n.$$

Konačno imamo $|c_{ii}\,w_i| > P_i(CW), i = 1, 2, \dots, n,$ pa je matrica C generalisano dijagonalno dominantna odakle slijedi da je regularna.

Matrica B – z I = M^{-1} ((1 – z) M – A) = M^{-1}C je regularna, što je kontradikcija pretpostavci da je z karakteristična vrijednost matrice B.

NUMERIČKI PRIMJER

Rješava se sistem Ax = b gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1{,}1 \\ 3 & 0{,}4 & 1 \end{bmatrix}\ b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2{,}1 \\ 4{,}4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Prema [1] za optimalni AOR, odnosno SOR postupak spektralni radijus matrice koraka iznosi

sr = 0,144.

Ako za tridijagonalnu matricu M izaberemo

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1{,}08 \\ 0 & 0{,}38 & 1 \end{bmatrix}$$

tada za spektralni radijus matrice koraka postupka (1) važi sr = 0,061. Jednostavno se provjerava da važe svi uslovi dokazane teoreme, pa u ovom slučaju postupak (1) brže konvergira od optimalnog AOR, odnosno SOR postupka.

Literatura

1. Avdelas G., Hadjidimos A.: Optimum Accelerated Overrelaxation Method in a Special case, Math. Camp. 36, 1981. pp. 183-187.